A 41. ORTVAY RUDOLF
FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI
2010. október 22 – november 2.

1. A régi birodalom hívei nem adják fel! Néhány sikertelen prototípus és hosszas tervezés után végre elkészült a 42. Halálcsillag, és egyenletes sebességgel útnak indul egy titkos bázisról. A Köztársaság hívei szerencsére tudomást szereznek erről, és elhatározzák mindkét objektum megsemmisítését. Van is némi információjuk a legújabb Halálcsillagról, amelynek alapján egy igen kifinomult műszert tudnak építeni. E műszer meg tudja állapítani, hogy egy választott térbeli pont 1 parszekes körzetében van-e a Halálcsillag. Sajnos ez a műszer hatalmas energiaigényű, és a mérés utáni újratöltése egy egész másodpercet vesz igénybe. A lázadók a műszer által a Halálcsillagról szolgáltatott információ alapján próbálják megtalálni és lerohanni a bázist. De ha nem kerülnek elég közel a bázishoz, akkor a jelenlétüket idő előtt észlelhetik, és a régi birodalom hívei pillanatszerűen elmozdíthatják a bázist a tér tetszőleges pontjába. Ezt elkerülendő, a bázis helyzetét $R \ll 1$ parsec pontossággal kell meghatározniuk, mielőtt mozgósítanák a flottát. Hány dimenziós tér esetében tudják ezt megtenni? Hogyan mérjék be a bázist? A bázis megtalálásakor elképzelhető, hogy a bázis védői üzenetet küldenek a Halálcsillagnak, hogy az módosítsa pályáját (az új pálya tetszőleges alakú lehet, a hipertér-ugrás lehetősége miatt még csak folytonosnak sem kell lennie). Viszont ha a lázadók pontosan be tudnák mérni a bázis ostroma előtt a Halálcsillagot is, akkor egyszerre rohanhatnák le a kettőt. Meg tudják-e ezt oldani, vagy abban a szerencsében kell bízniuk, hogy a bázis védői nem küldenek jelet a Halálcsillagnak? Ha nem tudják egyszerre bemérni a kettőt, de velük lesz az Erő, és a bázisról nem küldenek riadójelet, akkor a bázis lerohanása után vajon be tudják mérni a Halálcsillagot R pontossággal? Ha igen, hogyan?

   (Pósa Lajos ötlete alapján Balogh Máté)

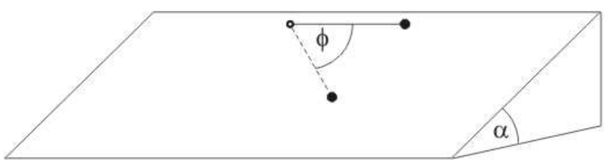
2. A Jéggömb kisbolygó tökéletes gömb alakú, és igen gyorsan forog a tengelye körül. Felszínét síma, dudoroktól és rianásoktól mentes jég borítja, ám a jég alatt jelentős ásványi kincsek és idegen civilizációk nyomai rejlenek. Érthető, hogy a földiek a bolygó felszínének minden négyzetcentiméterét át szeretnék kutatni, ezért két bázist építenek a felszínen. A földi kutatóállomásokat – sok elvetélt kísérlet után – pontosan a kisbolygő két sarkára telepítik (különben a centrifugális erő hatására elcsúsznának a jégen). A két sarki állomás közti közlekedésre igen egyszerű módszert eszelnek ki: kinyitják az állomás ajtaját, a korcsolyákra szerelt teherbobot megfelelő irányban és megfelelő sebességgel kilökik, aztán hadd csússzon!

   a) Milyen pályán mozog (a forgó bolygóhoz rögzített koordinátarendszerben) a bob?
   b) Hogyan válasszák meg a kezdősebességet, ha azt akarják, hogy a bob épp eltalálja a másik sarki állomás nyitott ajtaját (amely ugyanazon a délkörön fekszik, mint a kibocsátó állomásé)?
   c) Ice Joe, az állomás műszaki ügyeletese föld-, izé: jégrengető újítást vezetne be. Azt javasolja, hogy a kilökött bobot a lökés pillanatában hozzák a függőleges tengely körüli megfelelő ω szögsebességű forgásba. Állítása szerint ezzel azt is el lehet érni, hogy a bob – bekalandozva a kisbolygó fagyott felszínének jelentős részét – a terep feltérképezése után visszatérjen a kibocsátó állomásra. (Ezzel persze a másik sarki állomás fenntartása feleslegessé válik, a felszabaduló pénzt pedig új földi videokazetták beszerzésére lehet költeni.) Számoljunk utána, igaza van-e Joe-nak! Hány videokazettát vehet Joe a megspórolt pénzből?

   Műszaki adatok: a bolygó sugara R, forgásának szögsebessége Ω, a felszíni gravitációs gyorsulás g, a sarki állomások átmérője 4 földrajzi (izé: jéggömb-rajzi) szögmásodperc.

   (Dávid Gyula)

3. Egy fonál egyik végét α hajlásszögű lejtő lapjához rögzítjük, a másik végéhez pontszerű testet rögzítünk az ábrán látható módon. A testet a fonál kiegyenesített, vízszintes helyzetében kezdősebesség nélkül elengedjük. A lejtő és a test közti súrlódási együttható μ. Elemi úton (differenciálszámítás alkalmazása nélkül!), megfelelő fizikai analógia keresésével határozzuk meg, hogy a fonál milyen helyzetében maximális a fonálerő!



   (Pálfalvi László)

4. Egy síelő α hajlásszögű lejtőn csúszik lefelé, és egy kisebb bukkanóhoz ér. Ha ezen testhelyzetén nem változtatva halad át, akkor egy (kis) ugrás után folytathatja siklást a lejtőn. A síversenyzők között közismert, hogy gyorsabban haladnak, ha ilyen esetben nem, vagy csak lehető legkisebbet ugranak – azaz a havon siklás gyorsabb, mint az ugrás. Mi lehet a fizikai alapja ennek a meghökkentő tapasztalati ténynek? Tekintsünk el attól, hogy ugrás közben a síelőnek egyensúlyozni kell, ezért megnőhet a légellenállása, viszont vegyük figyelembe a nem nulla súrlódási együtthatót (pl. $\mu = 0,05$).

   (Cynolter Gábor)

5. Vizsgáljuk meg a közegellenállási erő sebességfüggését inga segítségével! Függesszünk fel egy nehéz golyót hosszú fonalra, és hagyjuk a levegőben lengeni (a fonal közegellenállását hanyagoljuk el)! Mérjük meg az inga maximális kitérését (tehát az inga mechanikai energiáját) a lengések számának függvényében! Ezzel megkapjuk a periódusonkénti energiaveszteséget. Számítsuk ki ezt az egy periódus alatt elszenvedett energiaveszteséget úgy, hogy különböző egyszerű függvényalakokat tételezünk fel a közegellenállási erő sebességfüggésére (lineáris, kvadratikus, stb.), és az eredményeket vessük össze a mérési eredménnyel! Használjunk analitikus számolást, ahol lehet! Próbáljuk meg a mérési eredményeket minél szemléletesebb és egyszerűbb módon ábrázolni, és az összehasonlítást grafikusan is szemléltetni! Próbáljuk meg a közegellenállás sebességfüggését minél pontosabban megállapítani a mérési eredmények és az ehhez szükséges számítások segítségével! A sebességtartomány jobb feltérképezéséhez végezzünk kísérleteket többféle ingahosszúsággal is!

(Veres Gábor)

6. Mivel felénk télen nincs délibáb, Bálint és Rozi kénytelenek voltak valami mással foglalkozni délután. Választásuk a nemrég szerzett Matchbox autóikra esett. Bálint, aki bölcs és megfontolt, nagyon vigyáz az autóira, így viszonylag kis kezdősebességgel indítja őket a pályán. Rozi ezzel szemben a sebesség megszállottja, igyekszik minél gyorsabban ellökni az autókat. A függőleges síkban fekvő pályát úgy alakították ki, hogy az autók végig rajta maradjanak. A súrlódást nem bánják, de a légellenállást igazán nem szeretik, így gyorsan összetákoltak egy vákuum-kamrát a pályának. Lévén, hogy mindketten fizikusok, gyorsan le is vezetik a megfelelő összefüggéseket a pálya végén mérhető sebesség és a kezdősebesség között a pályaalak függvényében. Vajon mit kapnak eredményül? Nagyon megörülnek eredményeiknek, és gyorsan elmondják Violának is. Viola nem tud sokat a differenciálegyenletekről, mégis azt mondja, hogy az eredmények egyáltalán nem meglepőek, sőt akár fejben is meg tudott volna határozni majdnem pontos kifejezéseket a végsebességekre. Vajon mire gondolt Viola? Kicsit megszeppennek Viola megoldásától, és valamelyest megrendül a hitük abban, hogy ez a legnagyobb felfedezés a 42 lapos tarokk óta. Hogy megnyugodjanak, szeretnék látni az explicit megoldást egy érdekes pályaalakra, és megvizsgálni, hogy megfelelő határesetekként visszakapják-e saját eredményeiket. Segítsünk nekik ebben! Vajon valódi Matchboxokkal meg lehet figyelni mindkét határesetet egy megépíthető pályán?

(Balogh Máté)

7. Lassan hajts, – felborulsz! Ha túlságosan lassan hajtjuk a kerékpárt, az könnyen felborul. Modellezzük ezt a (valóságban meglehetősen összetett) jelenséget egyetlen (a peremére koncentrált tömegeloszlású) m tömegű, R sugarú abronccsal, amely vízszintes talajon v_0 sebességgel haladva csúszásmentesen gördül, síkja függőleges! Legalább mekkora a v_0 sebesség, ha ez a mozgás kis perturbációkra nézve stabil? Milyen frekvenciájú rezgéseket (billegéseket) végez az abroncs, ha kicsit kitérítjük eredeti mozgásából?

(Gnädig Péter)

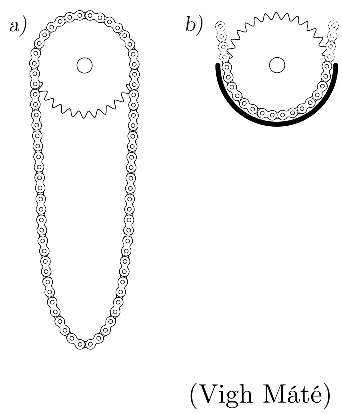
8. Kábelhíd esetén a kábel és a vízszintes úttest egyaránt jelentős súlyt képvisel. Milyen lesz a kábel alakja? Vizsgáljuk a speciális eseteket is, amikor a) az úttest sokkal nehezebb, mint a kábel, b) fordított eset! A két eset megfelel a rövid, illetve a hosszú hídnak. Adott hosszúságú úttest esetén melyik esetben van szükség hosszabb kábelre? Realisztikus példaként vizsgáljuk meg a budapesti Erzsébet-híd esetét!

(Cserti József és Tichy Géza)

9. Egy merev test felületén két rögzítési pont van. E két pontra rákötjük egy adott hosszúságú, tökéletesen hajlékony kötél két végét, és a kötelet egy kampóra akasztjuk. A kötél a kampón súrlódás nélkül elcsúszhat. Milyen feltételek mellett lesz stabil a felfüggesztett test? Lehet-e egy homogén tömegeloszlású gömböt a fentiek szerint úgy felakasztani a felületén lévő rögzítési pontokkal, a felületet csak a rögzítési pontokban érintő kötéllel, hogy ne legyen stabil?

(Stépán Gábor ötlete alapján Radnóczi György Zoltán)

10. Egy fogaskerék tengelyét vízszintesen rögzítjük, és ráhelyezünk egy kerékpárláncot, amely kezdetben az *a*) ábrán látható alakot veszi fel. Ezután a fogaskereket tengelye körül óvatosan forgatni kezdjük.
a) Milyen alakot vesz fel a lánc, amikor a fogaskerék már állandó szögsebességgel sebesen forog?
b) A fogaskerék kerületének alsó részén láncvezető sínek alkalmas elhelyezésével a láncot indíthatjuk úgy is, hogy a lánc csak alul érintkezzen a fogaskerékkel (így a lánc tömegközéppontja is a fogaskerék fölé kerül), ahogy az a *b*) ábrán látható. Ebben az esetben elképzelhető-e olyan kezdeti láncalak, hogy a fogaskereket sebesen megforgatva a lánc alakja stacionárius legyen? Más szavakkal: keressük meg a lánc elvileg lehetséges (stabil vagy instabil) egyensúlyi helyzeteit!

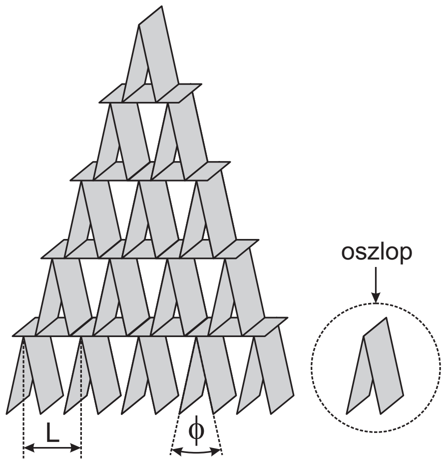


(Vigh Máté)

11. Elképzelhető-e olyan alakú és tömegeloszlású test, amely egy vízszintes, súrlódásmentes asztallapon a kezdeti instabil egyensúlyi helyzetéből (lökés nélkül) eldőlve elválik az asztallaptól?

(Vigh Máté)

12. Tökéletes kártyalapokból tökéletes kártyavárat építünk. A lapok teljesen egyformák, élük egyenes, vastagságuk elhanyagolható, tömegeloszlásuk homogén. Geometriai és fizikai paramétereikre (méret, tömeg, súrlódási együttható) vegyünk fel reális adatokat! A kártyavárat a kártyalapokkal megegyező anyagú talajra építjük. A kártyavárban minden fordított V alakú oszlop lapjai azonos ϕ szöget zárnak be egymással, tehát minden emelet azonos magasságú. Az oszlopok távolsága egyforma minden emeleten, de a szomszédos oszlopok össze is érhetnek. Minden szomszédos oszlop tetején egy fedél van, ami pontosan középre van igazítva. Tegyük fel, hogy a kártyalapok nem hajlanak meg! Határozzuk meg, hogy legfeljebb milyen magas kártyavárat építhetünk, ha tetszőleges módon, de rögzítjük a kártyavár lokális geometriai struktúráját: az oszlopok távolságát és a ϕ szöget! Hány csomag kártya kell hozzá?



Természetesen a ϕ szöget csökkentve elvileg tetszőleges magas kártyavár építhető (határesetben teljesen függőleges oszlopokból), azonban az építmény egyre instabilabb lesz. Tegyük fel, hogy a kártyavárat emeletről emeletre építjük, balról jobbra! Nagyon precízek vagyunk, és a kezünk sem remeg meg, ezért a kártyavárat homogén gravitációs mezőben tetszőleges sokáig tudjuk építeni tökéletesen függőlegesre. Az viszont előfordulhat, hogy a legutolsó oszlop, amit felrakunk, eldől. Az eldőlést modelezzük úgy, hogy az zérus kezdősebességgel történik, és a lapok rugalmatlanul ütköznek a szomszédos oszloppal vagy az emelet alapját alkotó lapokkal! Úgy szeretnénk építeni a kártyavárat, hogy abban az esetben, ha az utolsó felrakott oszlop a tető ráhelyezése előtt ledől, akkor ne döntsön maga után egyetlen további lefedett oszlopot sem. Tegyük fel, hogy a tető ráhelyezésének folyamata már biztonságosan megoldható! Milyen paraméterek (oszlop távolság és ϕ szög) esetén tudjuk a legmagasabb várat építeni? Ha numerikusan számolunk, akkor adjuk meg a választ legalább két különböző súrlódási együtthatóra!

Tudunk-e jelentősen javítani az elméleti magasságrekordon, ha nem ragaszkodunk ahhoz, hogy minden emeleten ugyanakkora oszloptávolságot és ϕ szöget használjunk, illetve a fedőlapokat is tetszőlegesen tehetjük az oszlopokra? Számít-e hogy milyen sorrendben építjük fel a várat? Vizsgáljuk meg, hogy elfogadható feltevés-e a kártyalapok behajlásától eltekinteni! Eredményeinket vessük össze a világrekorddal!

(Gáspár Merse Előd)

13. Modellezzük azokat a feszültségeket, amelyek az ajkai vörösiszap-tározó átszakadásához vezethettek! Miért épp a sarkán szakadt at a tározó? Mire utal az, hogy a gát több helyen meg is csúszott? Tekintsük a gátat egy nagy rugalmas állandójú szalagnak, és becsüljük meg, milyen feszültségek ébrednek egy tetszőleges alakú tározóban, ha a talajjal való kapcsolat erősséget is paraméternek tekintjük! Mikor rossz ötlet egy háromszög vagy négyszög alaprajzú tározó építése?

(Hantz Péter)

14. Adott egy üres, lezárt PET palack. Ha csökken a hőmérséklet, akkor csökken a benne lévő gáz nyomása, és deformálódik a palack. A palack keresztmetszete sokszög alakzatot vesz fel: az alak attól függ, hogy mekkora a légköri nyomás és a palackban lévő gáz nyomásának különbsége. Nagy nyomáskülönbségnél ez háromszög (extrém esetben, óriási nyomáskülönbségnél teljesen összelapult „kétszög"), és ahogy nő palackban lévő gáz nyomása, úgy vesz fel négy-, ötszög alakot és így tovább, míg határesetben – mikor nincs nyomáskülönbség – kör nem lesz. A különböző sokszög-alakzatokhoz tartozó nyomásértékek függnek a palack anyagától és falának vastagságától. Legyen a PET palackunk tökéletes, vagyis homogén és izotróp anyageloszlású, állandó r falvastagságú, rugalmas, R sugarú, h magasságú henger alakú test, ahol $r \ll R$ és $h = kR$, ahol $k \approx 6$! Adjuk meg a palackban található, ideálisnak tekinthető gáz n-szög alakhoz tartozó energianívóit, azaz az E_n függvényt! Adjuk meg a függvényt az $n \to \infty$ határesetben is! Mit mondhatunk ebben az esetben az energianívók sűrűségéről?

(Homa Gábor, Kis-Szabó Krisztián és Dobrik Gergely)

15. Alkothat-e két összeláncolt (egymáson átfűződő) merev, egyenletes sűrűségű, tömör tórusz alakú bolygó olyan rendszert, amelynek mozgása során a bolygók soha nem érnek egymáshoz? Térképezzük fel a fenti rendszereket a tóruszok geometria paraméterei, tömegeik és dinamikai kezdő adataik által alkotott paramétertérben! Vannak-e ezek között olyan rendszerek, amik stabilak? Vigyázat, több dinamikai szabadsági fok van! Mi történik például abban az esetben, ha lassul a „keringés", vagy ha megbillen az egyik tórusz síkja? (Analitikus számolások előnyben. Numerikus számítás esetén kérjük valamilyen módon ellenőrizni az eredményeket!)

(Gáspár Merse Előd)

16. Rézből készült templomi harangot modellezzük egy olyan gömbhéjjal, melynek belső és külső sugara R_1, illetve R_2! Tanulmányozzuk a harangban fellépő rugalmas hullámokat! Becsüljük meg egy tipikus méretű harang által keltett hang legkisebb frekvenciáját!

(Cserti József)

17. A homogén, ám nem izotróp kristályok rugalmas tulajdonságai a rugalmas együtthatók C_{klpq} tenzorával jellemezhetők. Az ilyen kristályokban egy rögzített $\mathbf{k}$ hullámszám-vektorhoz általában három, egymásra merőleges, de sem a $\mathbf{k}$ vektorral párhuzamos, sem rá merőleges irányú $\mathbf{a}^\beta(\mathbf{k}), \beta = 1, 2, 3$ polarizációs vektor tartozik. Ezek adják az egyes síkhullám-módusok kitérésvektorát, melyekhez általában különböző rezgési frekvenciák, így különböző fázis- és csoportsebességek is tartoznak.

Indítsunk el egy $\mathbf{k}_0$ hullámvektor köré felépített, csak az egyik módusra ($\beta = 1$) koncentrálódott hullámcsomagot! Vizsgáljuk a jelenséget a hullámcsomag középpontjával (a $\mathbf{k}_0$ vektornak megfelelő csoportsebességgel) együttmozgó koordinátarendszerből! Képzeljük el, hogy detektorunk csak egy másik módusra ($\beta = 2$) érzékeny! Mit érzékel a detektor? Milyen lesz a $\beta = 2$ módusban észlelt jel hely- és időfüggése?

Pótkérdés: milyen érdekes kvantummechanikai effektus matematikai leírására emlékeztet a vizsgált jelenség?

(Dávid Gyula)

18. Állóvízbe érkező, nem túl nagy hozamú vízeséseknél megfigyelhető jelenség, hogy a buborékokon kívül vízgolyók is keletkeznek az állóvíz felszínén. A golyócskák egy ideig mozognak a vízfelszínen, majd beleolvadnak a vízbe.

Készítsünk elméleti modellt, amivel meg tudjuk határozni a golyók mozgását, élettartamát! Mennyire függ a jelenség a folyadék összetételétől? Hogyan változik a golyók élettartama, ha a vízfelszín periodikus mozgást végez? Hogyan hat kölcsön több golyó a vízfelszínen?

A jelenség jól modellezhető szappanos víz csöpögtetésével, így a számolásokat kísérleti mérésekkel is alátámaszthatjuk.

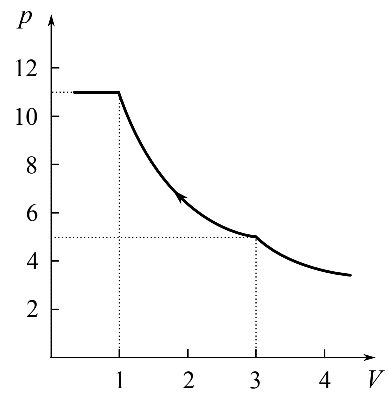
(Szécsényi István)

19. Egy dugattyúval ellátott tartályban $T = 77{,}4$ K hőmérsékletű, 176 g össztömegű nitrogén- és oxigéngáz keveréke található. (Normál légköri nyomáson egyébként a nitrogén forráspontja éppen $T = 77{,}4$ K, míg az oxigéné ennél valamivel magasabb, 90,2 K.) A hőmérsékletet állandó értéken tartva a gázelegyet lassan összenyomjuk, ezalatt a keverék nyomása az ábrán látható módon változik a térfogat függvényében, relatív egységekben.

a) Mekkora a tartályban lévő oxigén- és nitrogéngáz tömege külön-külön?

b) A megadott adatok alapján adjunk becslést az oxigén forráshőjére, ha ismert, hogy a nitrogén forráshője 199,3 J/g!

c) Az összenyomás befejezése után állandó térfogaton $T_2 = 90{,}2$ K-re növeljük a gázkeverék hőmérsékletét, majd lassan, izotermikusan hagyjuk kitágulni. Ábrázoljuk vázlatosan p–V diagramon a tágulást leíró izotermát a görbe jellegzetes pontjaihoz tartozó nyomás- és térfogatértékek SI-egységekben való feltüntetésével!



(Honyek Gyula)

20. A kombinált ciklusú hőerőgép két sorba kapcsolt hőerőgépet jelent. Az első, ami rendszerint gázturbina, egy magas hőmérsékletű hőtartály és egy alacsonyabb hőmérsékletű pont között működik. Az első gép által itt leadott hő működteti a másik hőerőgépet (rendszerint gőzturbina), amelynek alsó hőtartálya a környezet. Tegyük fel, hogy mind a két hőerőgép és az egyesített hőerőgép hatásfoka a két hőtartály hőmérsékletének egyforma függvénye! Mutassuk meg, hogy ebben az esetben ideális Carnot–gépekkel van dolgunk!

(Tichy Géza)

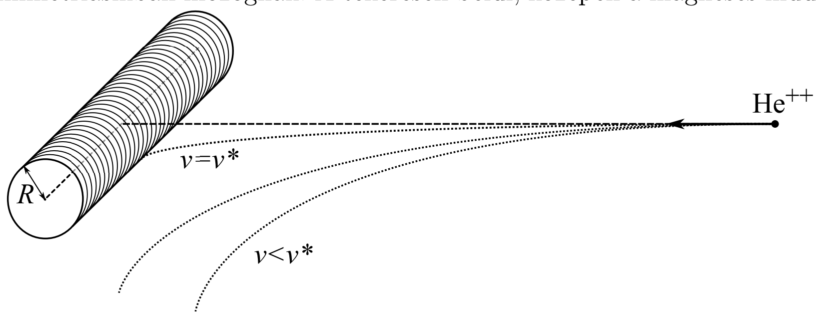
21. A Föld pályájának excentricitása 100 − 400 ezer éves időskálán $\varepsilon_{min} = 0{,}005$ és $\varepsilon_{max} = 0{,}058$ között változik. A változó excentricitás következtében a Napból a Földre jutó energia mennyisége módosul, s ez elvileg klímaváltozásokra vezethet. Határozzuk meg, hogy az excentricitás-változás maximálisan mekkora változást okozhat a Földre érkező energiaáramban, majd becsüljük meg, hogy ez mekkora változást okozhat a Föld hőmérsékletében (ehhez tételezzük fel, hogy a Föld fekete testként sugározza vissza a ráeső napsugárzást)!

(Rácz Zoltán)

22. Közismert, hogy vákuumban az árammal átjárt, végtelen hosszú egyenes vezető mágneses terében a B-vonalak körök. Kialakulhat-e kör alakú B-vonal egy olyan mágneses térben, amelyet két, egymástól adott távolságra haladó, árammal átjárt, végtelen hosszú, párhuzamos egyenes vezető hoz létre vákuumban?

(Radnai Gyula)

23. Ködkamrás kísérletben α-részecskék mozgását tanulmányozzuk. A részecskék nyalábját egy R sugarú, L hosszúságú, áramjárta szolenoidtól nagy (mondjuk $10L$) távolságból, a tekercs tengelyére merőleges szimmetriasíkban, a tengely irányában indítjuk el az ábrán látható módon. Azt tapasztaljuk, hogy a külső, szórt mágneses tér következtében a nyaláb csak akkor éri el a tekercset, ha a részecskék sebessége nagyobb egy kritikus v^* értéknél. Mekkora ez az érték? (A problémát kezeljük klasszikusan, és tegyük fel, hogy a részecskék mindvégig a tekercs tengelyére merőleges szimmetriasíkban mozognak! A tekercsen belül, középen a mágneses indukció nagysága B.)



(Vigh Máté)

24. A karácsonyi készülődés során Hümér egy üveggömböt fest aranyfestékkel. Nincs nagyon jó fantáziája, ezért egyszerű geometriai mintákban gondolkodik. Végül úgy dönt, hogy olyan görbét fest a díszre, amely minden hosszúsági kört ugyanolyan szög alatt metsz. A görbét az „északi sarktól" a déliig rajzolja. Hümér igen jómódú családból származik, így náluk az aranyfesték tényleg aranyból van. (Bizonyos apróságoktól, minthogy egy-egy helyen a görbe különböző részei nagyon közel kerülnek egymáshoz és összeérhetnének, a továbbiakban tekintsünk el!)

a) Mekkora áram folyik a mintán, ha Hümér egy 9 V-os elemet köt a két sarok közé? Mekkora a gömb középpontjában a B mágneses indukcióvektor nagysága?

b) Hümér húga, Eufrozina egy kicsit ügyetlen, és amikor közelebbről is meg akarja nézni a gömböt, leejti. Az padlóval való ütközés eredményeképpen a dísz kettétörik, pont a pólusokat összekötő szakasz felezősíkja mentén. Hümér ettől igencsak elszomorodik, de rossz kedve nem tart sokáig, mivel hamarosan észreveszi, hogy milyen szép árnyékot vet a dísz fele a falra, ha távoli lámpafény esik rá a pólus irányából (a dísz törése párhuzamos a fallal). Hümér gyorsan le is festi az árnyékot aranyfestékkel. Adjunk minél pontosabb becslést az ehhez szükséges festék mennyiségére!

c) A minta egyik vége a gömb pólusának vetülete. A görbe másik végén és egy, a pólus vetületéhez közel eső ponton át I áramot vezetünk. Adjunk minél jobb becslést a görbe közepén mérhető B-re! Mennyire jók a becsléseink egy reális karácsonyfadíszre?

Bónuszkérdés: A család egy régi ismerőse, aki nyugalmazott hajóskapitány, meglátogatja őket a készülődés alatt. Nagyon megörül Hümér díszének, mivel fiatalkori emlékeit juttatja eszébe. Hány éves a kapitány?

(Balogh Máté)

25. Múlt héten az Alexander nevű bolygón jártunk. Nagyokat kirándultunk, és élveztük az amúgy a földivel azonos összetételű, csak sokkal tisztább levegőt. Délután gyönyörű szivárványt láttunk. A Földön megszokottal szemben ennek a szivárványnak a külső és belső íve is ibolya színű volt, majd befelé sorban követték egymást a látható spektrum színei, középen pedig egy széles vörös sáv helyezkedett el. Vajon milyen törésmutatójú anyagból vannak a felhőben lebegő (gömb) alakú cseppek? Milyen szögben láttuk a szivárvány középső vörös sávját?

(Cserti József és Dávid Gyula)

26. Számítsuk ki és ábrázoljuk a fő szivárvány keletkezésekor kialakuló kausztika alakját a vízcseppen kívül, illetve belül! Tegyük fel, hogy a vízcseppek gömb alakúak!

(Cserti József)

27. Einsteinnek Roosevelthez 1939. augusztusban írt nevezetes levelében szerepel az alábbi mondat: „Lehet azonban, hogy légi szállításra az ilyen bombák túlságosan nehéznek bizonyulnak." (However, such bombs might very well prove to be too heavy for transportation by air.) Miért gondolhatta akkor ezt így Szilárd Leó, Wigner Jenő és Teller Ede is, akik közreműködtek a levél megfogalmazásában?

(Radnai Gyula)

28. Amorf anyagban minden atomhoz definiálhatunk egy Voronoi-poliédert, melynek belső pontjai azon pontok, amelyek közelebb vannak a kijelölt atomhoz, mint bármely más atomhoz. Mutassuk meg, hogy a Voronoi-poliéderekre teljesül a

$$\sum_i (6-i)n_i = 12$$

feltétel, ahol n_i az i oldalú lapok száma!

(Tichy Géza)

29. Fémekben a rács hővezetése jóval kisebb, mint az elektronoké, ezért érvényes a Wiedemann–Franz-törvény. Ez a feltétel azonban erősen adalékolt félvezetőkre is igaz, de a Wiedemann–Franz-törvény mégsem teljesül. Milyen alapvető feltételnek kell még fennállnia, hogy a Wiedemann–Franz-törvény teljesüljön?

(Tichy Géza)

30. Határozzuk meg egy gömbszimmetrikus test körüli gravitációs térben egy fénysugár lehetséges pályáit! Létezik-e zárt pálya?

(Bene Gyula)

31. Egy kétbillió km átmérőjű (ez az eseményhorizont mérete), nem forgó fekete lyuk felé négy egyforma űrhajó zuhan, egy síkban, egymással rendre 90 fokot bezáró egyenesek mentén. Az űrhajók sebessége a végtelenben nulla volt. A fekete lyuk köré rajzolható adott sugarú gömböt az űrhajók ugyanabban a pillanatban metszik (a Schwarzschild-metrika szerinti vonatkoztatási rendszerben számolva). Az űrhajók egyforma méretűek, hosszuk 1 km, és az orrukra szerelt jeladó mikromásodpercenként bocsát ki egy éles rádióimpulzust.

Zuhanás közben – jobb híján – az űrhajók személyzete a többi űrhajó megfigyelésével tölti a (saját)időt. Számítsuk ki, mikor milyen irányban látják az egyes űrhajók utasai a többieket! (A „mikor" fogalmát az űrhajósok sajátidejével definiáljuk, a nulla sajátidőpontot az eseményhorizonton történő áthaladáshoz rögzítjük.) Vizsgáljuk meg az eseményhorizont átlépése előtti és utáni időszakot is! Hogyan és mikor látják meg az űrhajósok a velük szemben közeledő hajót? Milyen pályán látják mozogni a szomszédos hajókat? Mekkorának észlelik a többi hajó hosszúságát a sajátidő függvényében? Hogyan változik a többi hajó által kibocsátott rádiójelek észlelt periódusa, ugyancsak a sajátidő függvényében? Tudnak-e egymásnak üzenni, rádióüzeneteket cserélni az eseményhorizont átlépése előtt és után?

(Dávid Gyula)

32. Az $\mathbf{r} = (x, y)$ síkban mozgó feles spinű részecske Dirac–Hamilton-operátora:

$$\hat{H} = v\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} + V(\mathbf{r})\,\sigma_z,$$

ahol $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$ és σ_z a Pauli mátrixok, a $\hat{H}$ Hamilton-operátor a $\psi(\mathbf{r}) = (\psi_1(\mathbf{r}), \psi_2(\mathbf{r}))^T$ két-komponensű spinor hullámfüggvényre hat (T a transzponálást jelenti), és v egy állandó. A „tömeg" jellegű $V(\mathbf{r})$ potenciál a σ_z Pauli mátrixhoz csatolódik. Tekintsünk egy gyűrű alakú D tartományt („biliárd"), melynek belső és külső sugara R_1, illetve R_2! Tegyük fel, hogy $V(\mathbf{r}) = 0$, ha $\mathbf{r} \in D$ (a biliárdon belül), és a D tartomány határán a potenciál a végtelenhez tart (merev potenciál)! Ily módon a részecskét egy gyűrű alakú biliárd belsejébe zárjuk. Ebben az esetben ismert, hogy a határfeltétel $\psi_2/\psi_1 = \pm i e^{i\varphi}$, ahol φ az $\mathbf{r} = R_2(\cos\varphi, \sin\varphi)$ vektor polárszöge, míg + és − a gyűrű külső és belső körén érvényes (lásd, pl. M. V. Berry and R. J. Mondragon, Proc. R. Soc. London, Ser. A **412**, 53–74 (1987)). Vezessük le a szekuláris egyenletet, melynek pozitív gyökei a fenti Dirac–Hamilton-operátor energia-sajátértékei! Számítsuk ki numerikusan az első néhány energiaszintet ($\hbar v/R_1$ egységekben) adott R_2/R_1 arány mellett! Mi a fizikai háttere a fenti határfeltételnek? Van-e ennek a problémának valami köze a neutrínóhoz vagy a jól ismert grafénhez?

(Cserti József)

33. Határozzuk meg egy végtelen magas potenciálfalú háromdimenziós potenciáldobozba bezárt egyetlen részecske abszorpciós spektrumát, amely a gerjesztés előtt alapállapotában volt! A doboz alakja legyen egy a élű szabályos kocka, illetve egy vele *azonos* térfogatú általános téglatest b, c és d élekkel! Milyen lesz a két rendszer abszorpciós spektruma? A számítások során használjuk a Fermi-féle aranyszabályt! Vizsgáljuk a hosszúkás négyzetes hasáb alakú doboz speciális esetet ($d = \chi a$, $b = c = a/\sqrt{\chi}$, ahol χ egy egynél nagyobb szám)! Hasonlítsuk össze a rezonanciafrekvenciákat és az intenzitást a szabályos kocka esetével, és ennek alapján írjuk le az abszorpciós spektrum polarizáció-függését! Melyik kvantumdoboznak van összességében nagyobb abszorpciója a gerjesztési energia azon tartományában, amely a kocka alapállapoti energiájának nullaszorosa és százszorosa közé esik, amennyiben χ egy *kicsit* nagyobb egynél?

(Gali Ádám)

34. Egy kellően hegyes fémtű helyezkedik el egy földelt félvezető minta felett, mely egy záró irányban előfeszített p–n átmenetnek tekinthető. A tűre kellően magas elektromos feszültséget kapcsolva a kialakuló elektromos tér hatására ioncsatorna jön létre, és ezáltal a félvezető minta felületére töltés kerül. Ennek következtében a minta felületén kialakul egy időtől függő elektromos potenciál. Egy meghatározott küszöbfeszültség felett ezek a töltések már elszivárognak a földelésen keresztül a minta felületéről (ez nem klasszikus jelenség).
Tegyük fel, hogy a tűre egy periodikus négyszögjel alakú feszültséget kapcsolunk, azaz t_1 ideig töltjük a mintát, majd t_2 ideig egy szenzorral mérjük a mintán a felületi potenciált, és ezt ismételjük n-szer.
Miután átléptük a szivárgási áram megindulásához szükséges küszöbfeszültséget, a felületi potenciált az idő függvényében a következőképpen határozhatjuk meg: A töltés kezdetén a potenciál U_1, a töltés végén U_2 a mérés végén U_3. Jelöljük U_k-val a folyamatot generáló küszöbfeszültséget! Töltés közben a következő egyenlet írható fel: $C\frac{dU}{dt} = -I_0(e^{\frac{U-U_k}{V}} - 1) + I_f$, ahol C a minta kapacitása, U a minta felületi feszültsége az idő függvényében, V a termikus feszültség 300 K hőmérsékleten, I_0 a folyamat kezdetén folyó áram, I_f a forrásáram. Amikor nem töltünk, akkor a fenti egyenletben $I_f = 0$ írandó.
Oldjuk meg az egyenleteket, és ábrázoljuk általunk szabadon megválasztott paraméterekkel az első $n = 10$ periódust!

(Homa Gábor)

35. Amíg anya szoptat, apa számol...
A szoptatás csodálatos, de messze nem könnyű feladat egy anyának sem! Vajon tud-e segíteni ebben az egyszerre ösztönös és tanulandó folyamatban a szakirodalom, a védőnő, a szoptatási tanácsadó, a gyerekorvos, a mindentudó rokonok, a már két hónapos gyermekkel rendelkező rutinos fiatal mamák és a mindenek felett álló internet mellett a matek/fizika is? Az optimális szoptatási stratégiát keressük két mellből, jelentősen egyszerűsített modellben a következő feltételek mellett: i) Mindkét mell tejtároló képessége azonos. ii) A baba szopási sebessége arányos az aktuális ciciben lévő tejmennyiséggel. iii) A mell tejtermelési sebessége arányos a cicben lévő tejhiány mértékével.
a) Hogyan alakul az aktuális ciciben lévő és a megevett tejmennyiség időben szopás közben?
b) Mi az optimális egy alkalmas szoptatási stratégia két mellből, T idő alatt?
c) Mi az optimális folyamatos szoptatási stratégia, ha T_1 idejű szoptatási ciklusok között T_2 idejű pihenők vannak?
A baba gyarapodása során egyre hatékonyabban eszik, a tej mennyisége is növekszik jó esetben. Hogyan függnek az optimális stratégiák a tejtermelődési és a szopási sebesség arányától?
További hasznos információk a szoptatásról itt: http://www.lll.hu/ :)

(Vásárhelyi Gábor)

\end{document}